La division (2)

Piero Brunet

De nouvelles fiches pour travailler encore sur la division avec une petite variation sur ce thème: l'indiction

Dans la rubrique dédiée à la mathématique du numéro 39 de l'École nous avons abordé l'aspect du reste dans les opérations de division à quotient entier.
Quelques suggestions de travail ont été proposées aux enseignants sous forme de fiches préparées à l'intention des élèves de troisième et/ou quatrième élémentaire.
Ce travail, entre autre, permet à l'élève de se familiariser avec un certain nombre de structures typiques de l'arithmétique modulaire (classes d'équivalences, ensemble quotient, ...) et de s'approcher de façon intuitive et tout à fait informelle aux concepts énoncés par les deux théorèmes des restes.

Premier théorème des restes:

Condition nécessaire et suffisante afin que deux nombres entiers *a, b,* divisés par un entier *d*, donnent des restes égaux, est que la différence des deux nombres soit divisible par *d*.

ex: *(a = 38; b = 23; d = 5)*

(38 - 23) Mod(1) 5 = 0(2)
(38 Mod 5) = 3
(23 Mod 5) = 3

Deuxième théorème des restes:

Si deux ou plusieurs nombres entiers, *a, b,* ..., divisés par un même nombre entier *d*, donnent comme restes *r, s,* ..., alors:

- les sommes *(a + b + ...)* et *(r + s + ...)*, divisées par *d*, donnent des restes égaux;
- les produits *(a x b x ...)* et *(r x s x ...)*, divisées par *d*, donnent des restes égaux;

ex: *(a = 18; b = 23; d = 4)* ;
(a Mod d) = r => r = 2
(b Mod d) = s => r = 3

[(18 + 23) Mod 4] = 1
[(18 Mod 4) + (23 Mod 4)] = 1

[(18 x 23) Mod 4] = 2
[(18 Mod 4) x (23 Mod 4)] Mod 4 = 2

(1) "Mod" est la fonction qui fournit le reste d'une division à quotient entier.

(2) (38-23): 5 donne reste 0.

Avant de passer à la deuxième partie des fiches qui intègrent les précédentes et complètent le travail proposé avec cette unité didactique sur les classes de reste, je me permets de présenter au lecteur une petite variation sur le thème.

Les classes de reste dans nos anciens documents

Une façon originelle de mesurer le temps: *l'Indiction*

Au nom de dieu
amen l'an de grace courant
mil cinq centz septante neufz
indiction septiesme
et le jour quinziesme
du moys d'octobre
faict en Plan d'Introd
sçavoir en la place devant la
chappelle illec fondée . . .

L'indiction était un cycle d'une durée de quinze ans.
L'ordre que chaque année (le millésime) occupait à l'intérieur de ce cycle était régulièrement reporté dans les documents officiels rédigés pendant le Moyen Age.
Au Val d'Aoste, cette coutume a pris fin au cours du dix-septième siècle et, lentement, son souvenir s'est estompé.
Liée à la structure modulaire de l'arithmétique, la valeur de l'induction (de *un à quinze*[3]) était une sorte de mesure du temps. Une mesure qui, à l'origine, était liée à l'aspect économique, et plus précisément à la redéfinition des impôts, après une mise à jour des valeurs cadastrales.
Les historiens ne sont pas unanimes sur l'origine de l'indiction.
Toutefois, la plupart d'entre eux fait remonter la première apparition de l'indiction au 22 septembre de l'an 312, sous le consulat de Licinio et Constantin.
Ce qui, par contre, est certain c'est que Justinien, au cours du sixième siècle, a prescrit que tout acte public, sous peine de nullité, porte le jour, le mois, l'année, ..., et enfin l'ordre de cette année à l'intérieur du cycle de l'indiction.
On se demande tout de même comment cette habitude a pu résister aussi longtemps, pendant plus de dix siècles, pour arriver, chez nous, jusqu'au début du dix-septième siècle.
Il est indéniable que dans bien des cas l'indiction a été particulièrement utile aux historiens qui s'en sont servi pour résoudre des problèmes de datation, lorsque le texte, contenant le millésime, était difficilement lisible ou déchiré.
Dans d'autres cas il a permis de démasquer des documents faux, rédigés longtemps après par quelqu'un qui n'était pas à même de déterminer la valeur correcte de l'indiction, par rapport à l'année reportée sur le document.

(3) Le quinze correspond aux années appartenant à la classe de reste zéro. A ces années qui, divisées par quinze, donnent reste zéro.

Comment pouvons nous calculer, aujourd'hui, la valeur de l'indiction correspondant à une année donnée?

Compte tenu que l'année 313 représentait la première année d'indiction, nous pouvons procéder de la façon suivante:

(313 + k) Mod(4) 15 = 1(5).

k est en réalité un paramètre dont les valeurs sont représentées par les nombres appartenant à la classe de reste 3, module 15, (k Mod 15 = 3), c'est-à-dire par tous ces nombres qui, divisés par 15, donnent comme reste 3.
Ce qui, en IN, correspond à l'ensemble numérique infini suivant: {3, 18, 33, 48, 63, ...}.
Pour une question de simple commodité on assume la valeur la plus petite de *k*, c'est-à- dire *k* = 3.

Si nous désirons donc obtenir la valeur de l'indiction de l'année 1998, il suffit de calculer: (1998 + 3) Mod 15.
et: 2001 Mod 15 = 6.

Ce qui nous permettrait d'écrire aujourd'hui :

Au nom de dieu
amen l'an de grace courant
mil neufz centz nonante huict
indiction sixiesme
et le jour quinziesme
du moys d'octobre
faict en Plan d'Introd
sçavoir en la place
devant la chappelle illec fondée...

(4) "Mod" est la fonction qui fournit le reste d'une division à quotient entier.
(5) 1 est le reste de la division, à quotient entier, suivante (313 + k) : 15.

Deuxième partie de l'unité didactique

Présenté aux élèves sous forme de jeu, cet ensemble de fiches se prête assez bien à renforcer les connaissances et les compétences des élèves relatives à un certain nombre de propriétés et de concepts arithmétiques:

- l'élément neutre ;
- l'élément zéro ;
- l'addition lacunaire ;
- les progressions ;
- les structures des nombres pair et impairs dans le contexte de l'addition et de la multiplication ;
- . . .

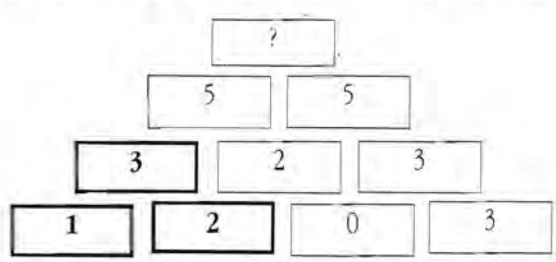
Certaines fiches ont été proposées à l'élève afin de l'inciter à inventer lui-même des fiches, à compléter, pour ses camarades, tout en respectant certaines contraintes fixées.

les nombres pairs et les nombres impairs

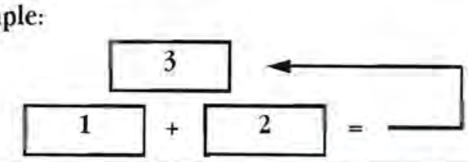
Activité de révision

L'ensemble des fiches proposées prévoit:

1) découverte de la règle de composition (fiche pl 1)



exemple:



2) application de la règle (fiche pl 2...pl 7)

3) application du concept d'addition lacunaire (fiches pl 2...pl 7)

4) Les nombres pairs et les nombres impairs, dans la multiplication (fiches pl 8... pl 10)

Fiche pour l'élève

La pyramide des nombres

	...		
	8	12	
3	5	7	
1	2	3	4

Suggestions de travail:

Observe attentivement la valeur de chaque brique de cette pyramide et réponds aux questions.

1) Quelle est la valeur de la brique du sommet?

2) Explique la règle de composition de cette pyramide.

Fiche pour l'élève

La pyramide des nombres

	...		
	...	...	
...	6	9	
3	1	...	4

Utilise la règle de composition de la fiche et trouve les valeurs de chaque brique.

Fiche pour l'élève

La pyramide des nombres

Utilise la règle de composition de la fiche et trouve les valeurs de chaque brique des pyramides suivantes.

25			
11			
	6		
		4	

	20		
	13		
1		4	

5		2	
1		0	

15			
		2	
1		0	

Fiche pour l'élève

Utilise la règle de composition de la fiche et trouve les valeurs de chaque brique des pyramides suivantes.

2	2		
2		2	
2			2

1	1	1	1

8			
	4		
		2	
			1

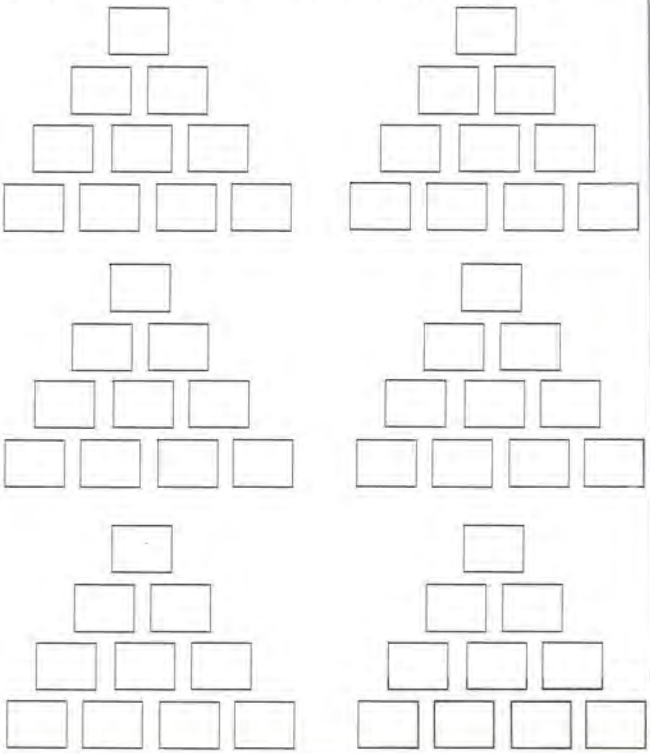
16			
	8		
		4	
			2

32			
	16		
			4

0			

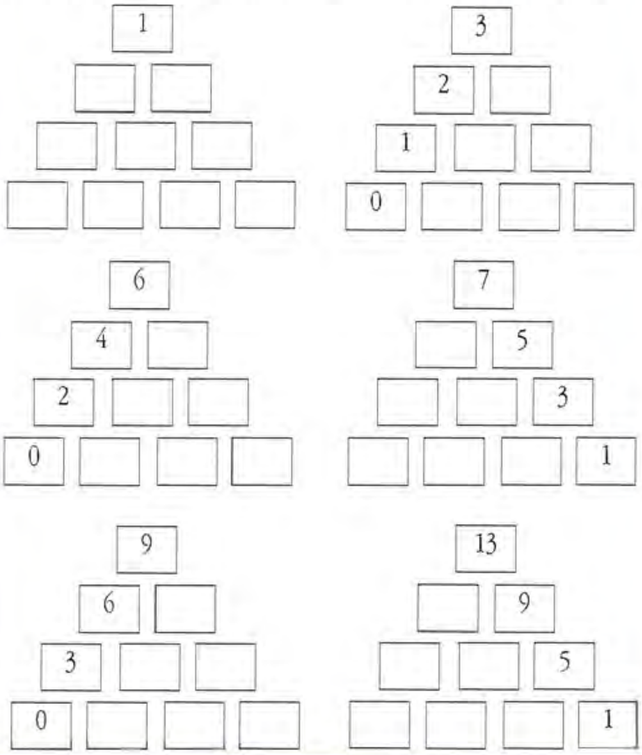
pl 5 — Fiche pour l'élève

Utilise la règle de composition de la fiche pl 1 et invente toi-même une fiche à compléter pour tes camarades.



pl 6 — Fiche pour l'élève

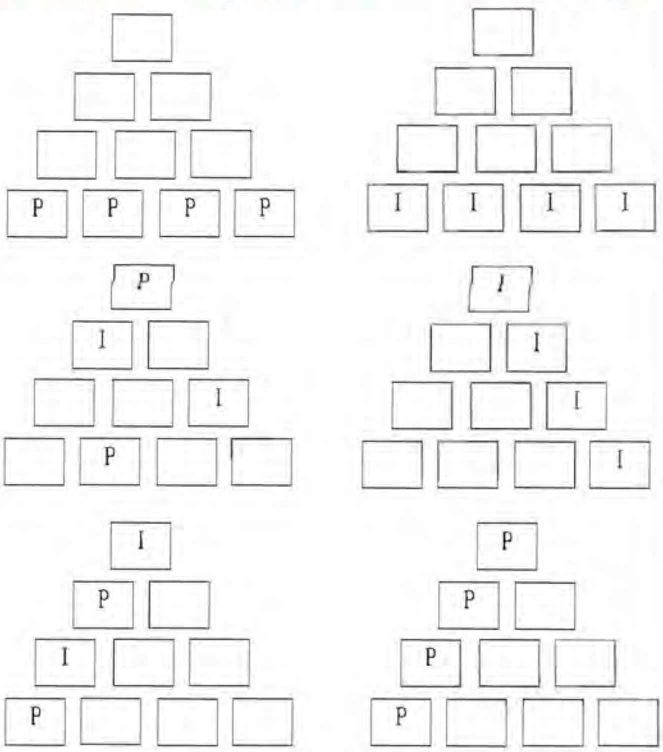
Utilise la règle de composition de la fiche pl 1 et trouve les valeurs de chaque brique des pyramides suivantes.



pl 7 — Fiche pour l'élève

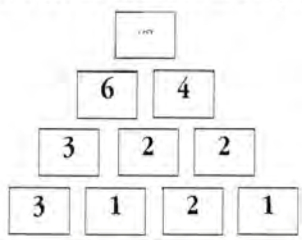
Utilise la règle de composition de la fiche pl 1 et complète les pyramides suivantes.

Attention! ***P signifie pair*** ***I signifie impair***

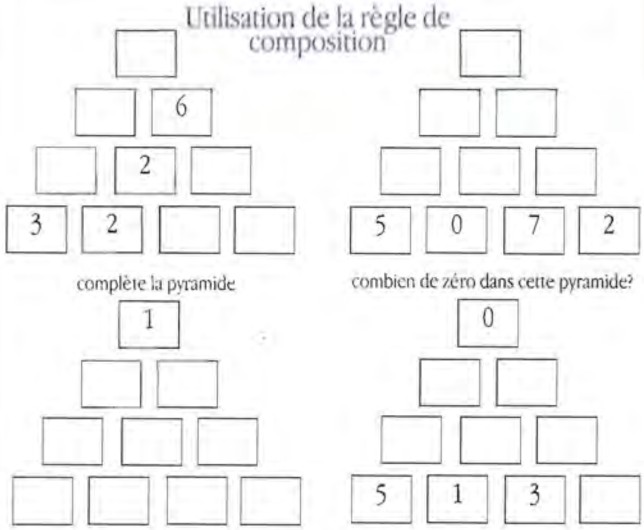


pl 8 — Fiche pour l'élève

Quelle est l'opération utilisée pour la construction de cette pyramide? Quelle est la valeur de la brique du sommet?



Utilisation de la règle de composition



complète la pyramide

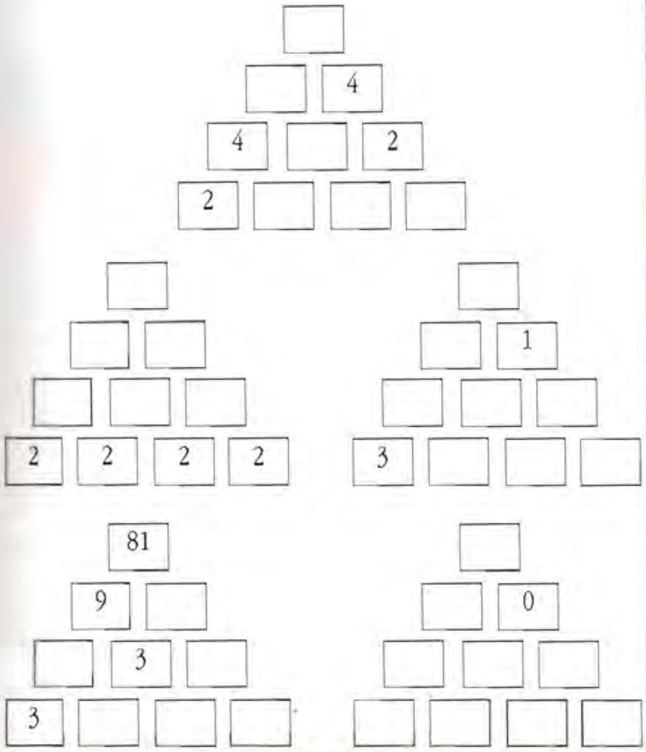
combien de zéro dans cette pyramide?

complète la pyramide

complète la pyramide

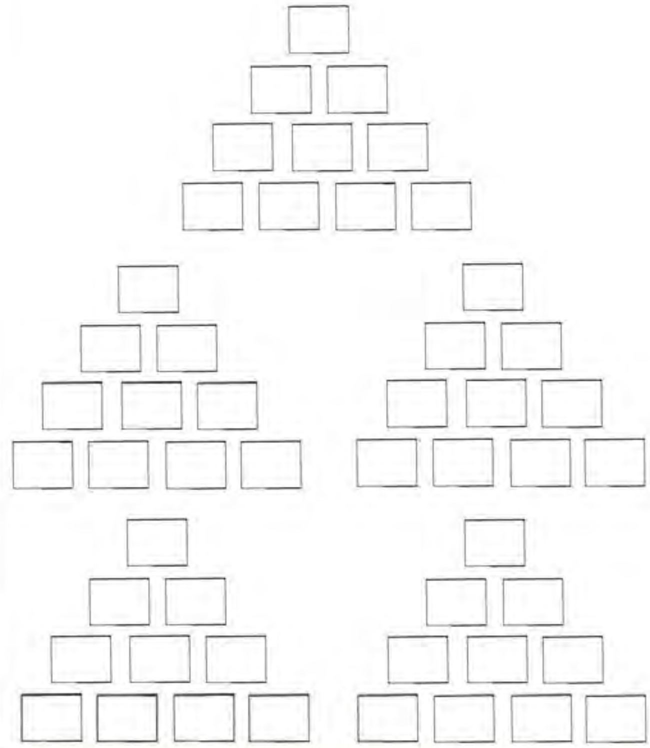
pd 9 | Fiche pour l'élève

Utilise la règle de composition de la fiche pd 8 et trouve la valeur de chaque brique des pyramides suivantes.



pd 10 | Fiche pour l'élève

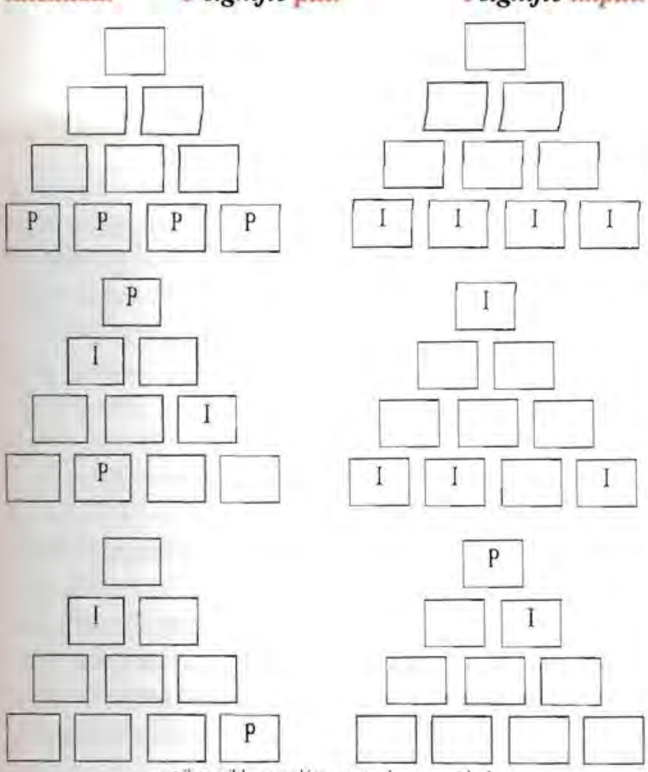
Utilise la règle de composition de la fiche pd 8 et invente toi-même une fiche à compléter pour tes camarades.



pd 11 | Fiche pour l'élève

Utilise la règle de composition de la fiche pd 8 et complète les pyramides suivantes.

Attention! ***P signifie pair*** ***I signifie impair***



est-il possible compléter toutes les pyramides?

pd 12 | Fiche pour l'élève

Utilise la règle de composition de la fiche pd 8 et invente toi-même une fiche à compléter pour tes camarades.